

# ALGEBRA BOOLE'A

George Boole był angielskim matematykiem samoukiem, człowiekiem który miał duży wpływ na kształt dzisiejszej technologii cyfrowej. Opracował **Algebrę Boole'a** która co do zasady jest zbiorem założeń wykonywania operacji logicznych.

**Operacje logiczne** – wykorzystują tylko dwa stany: zero (stan napięcia bliski zero) i jeden (stan napięcia bliski napięciu zasilania). System wykorzystujący takie rozwiązanie nazywamy dwójkowym (binarnym).

Operacje logiczne:

| NAZWA                           |                  |     | OZNACZENIA |                    |
|---------------------------------|------------------|-----|------------|--------------------|
| <b>Negacja</b>                  | zaprzeczenie     | NOT | $\sim$     | $\neg$             |
| <b>Alternatywa</b>              | suma logiczna    | OR  | $\cup$     | $\vee$             |
| <b>Koniunkcja</b>               | iloczyn logiczny | AND | $\cap$     | $\wedge$           |
| <b>Alternatywa wykluczająca</b> | suma modulo 2    | XOR | $\oplus$   | $\underline{\vee}$ |

PODSTAWOWE

| a | b | c | NEGACJA<br>$\neg c$ | ALTERNATYWA<br>$a \vee b$ | KONIUNKCJA<br>$a \wedge b$ | ALTERNATYWA WYKLUCZAJĄCA<br>$a \underline{\vee} b$ |
|---|---|---|---------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1                   | 0                         | 0                          | 0                                                  |
| 0 | 1 | 1 | 0                   | 1                         | 0                          | 1                                                  |
| 1 | 0 |   |                     | 1                         | 0                          | 1                                                  |
| 1 | 1 |   |                     | 1                         | 1                          | 0                                                  |

Operacja dwuargumentowa. Wynikiem jest jeden jeżeli choć jeden z argumentów ma wartość 1. Jeżeli oba mają 0, alternatywa również ma 0.

Operacja dwuargumentowa. Wynikiem jest 1 jeżeli oba argumenty mają wartość 1. W pozostałych przypadkach koniunkcja równa jest 0.

Operacja dwuargumentowa. Wynikiem jest 1, jeżeli argumenty są różne od siebie. W przypadku takich samych alternatywa wykluczająca równa jest 0.

### Własności algebry Boole'a

|                |                |                    |
|----------------|----------------|--------------------|
| $a \cup a = a$ | $a \cap a = a$ | $a \cup 0 = a$     |
| $a \cap 1 = a$ | $a \cup 1 = 1$ | $a \cap 0 = 0$     |
| $\sim 0 = 1$   | $\sim 1 = 0$   | $\sim(\sim a) = a$ |

### Prawa algebry Boole'a

| PRAWO        | WARUNKI                                          |                                                  |
|--------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| Łączność     | $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$          | $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$          |
| Przemienność | $a \cup b = b \cup a$                            | $a \cap b = b \cap a$                            |
| Absorpcja    | $a \cup (a \cap b) = a$                          | $a \cap (a \cup b) = a$                          |
| Rodzielność  | $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$ | $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$ |
| Pochłonięcie | $a \cup \sim a = 1$                              | $a \cap \sim a = 0$                              |

|                     |                                                         |
|---------------------|---------------------------------------------------------|
| Różnica symetryczna | $a \oplus b = (a \cap (\sim b)) \cup (b \cap (\sim a))$ |
|---------------------|---------------------------------------------------------|

### Prawo De Morgana

August De Morgan urodzony w Indiach, angielski matematyk. Jego prawa są przykładem praw logicznych – zawsze prawdziwych zdań w logice. Dodatkowo umożliwiają przekształcenie koniunkcji na alternatywę oraz alternatywy na koniunkcję.

| PRAWO               | WARUNKI                                       |
|---------------------|-----------------------------------------------|
| I prawo De Morgana  | $\neg(p \wedge q) \iff (\neg p \vee \neg q),$ |
| II prawo De Morgana | $\neg(p \vee q) \iff (\neg p \wedge \neg q).$ |

Koniunkcja zastąpiona alternatywą

$$p \wedge q = \neg(\neg(p \wedge q)) = \neg(\neg p \vee \neg q)$$

Alternatywa zastąpiona koniunkcją

$$p \vee q = \neg(\neg(p \vee q)) = \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

## Tablica prawdy

Inaczej matryca logiczna, jest to układ tabelaryczny zero-jedynkowych kombinacji wartości logicznych argumentów danej funkcji zdaniowej i dokładnie zależących od nich wartości logicznych tejże funkcji zdaniowej, w którym prawdzie (true) odpowiada 1, a fałszowi (false) przypisuje się 0.

### Schemat tablicy prawdy

| sensor inputs |   |   | Output |
|---------------|---|---|--------|
| A             | B | C |        |
| 0             | 0 | 0 | 0      |
| 0             | 0 | 1 | 0      |
| 0             | 1 | 0 | 0      |
| 0             | 1 | 1 | 0      |
| 1             | 0 | 0 | 0      |
| 1             | 0 | 1 | 0      |
| 1             | 1 | 0 | 0      |
| 1             | 1 | 1 | 1      |

Output = 0  
(close valve)

Output = 1  
(open valve)

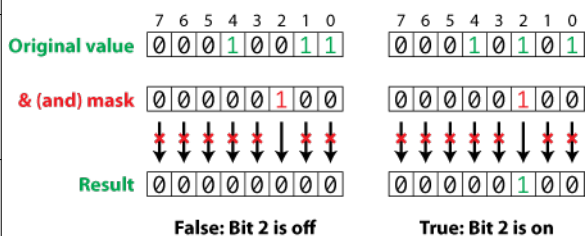
©allaboutcircuits.com

## Dodatkowe operacje bitowe

Prócz działań na bitach które zostały opisane na pierwszej stronie (tj. negacja, alternatywa, koniunkcja oraz suma modulo 2) można przytoczyć operacje które wykorzystują tzw. maskę.








| NAZWA                         | CEL                                                                                                                                                                                           |
|-------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Zerowanie bitu</b>         | Operacja <b>koniunkcji</b> z maską, której wszystkie bity ustawione są na 1 z wyjątkiem bitu na pozycji pożądaney zmiany.                                                                     |
| <b>Ustawianie bitu</b>        | Operacja <b>alternatywy</b> z maską, której wszystkie bity ustawione są na 0 z wyjątkiem bitu na pozycji pożądaney zmiany.                                                                    |
| <b>Negacja bitu</b>           | Operacja <b>alternatywy wykluczającej</b> z maską, której wszystkie bity ustawione są na 0 z wyjątkiem bitu na pozycji pożądaney zmiany.                                                      |
| <b>Sprawdzanie stanu bitu</b> | Operacja <b>koniunkcji</b> z maską, której wszystkie bity ustawione są na 0 z wyjątkiem bitu na pozycji pożądaney zmiany. Jeżeli wynik jest różny od 0 oznacza to że miał stan 1 i na odwrót. |

Przykład operacji sprawdzania stanu bitu.



©c-for-dummies.com

Bramki logiczne

| Basic Logic Gates |                                                                                     |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|---|---|---|---|--|------------------------------------------|---|--|---|---|--|---|---|--|---------------------------------------------------------------------------|
| Logic             | Schematic                                                                           | Boolean Expression          | Truth Table                                                                                                                                                                                                                                                                           | English Expression |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| <b>AND</b>        |    | $A \cdot B = Y$             | <table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> | A                  | B | Y | 0 | 0 |  | 0                                        | 1 |  | 1 | 0 |  | 1 | 1 |  | The only time the output is positive is when all the inputs are positive. |
| A                 | B                                                                                   | Y                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 0                 | 0                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 0                 | 1                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 1                 | 0                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 1                 | 1                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| <b>OR</b>         |    | $A + B = Y$                 | <table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> | A                  | B | Y | 0 | 0 |  | 0                                        | 1 |  | 1 | 0 |  | 1 | 1 |  | The output will be positive when any one or all inputs are positive.      |
| A                 | B                                                                                   | Y                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 0                 | 0                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 0                 | 1                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 1                 | 0                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 1                 | 1                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| <b>XOR</b>        |    | $A \oplus B = Y$            | <table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> | A                  | B | Y | 0 | 0 |  | 0                                        | 1 |  | 1 | 0 |  | 1 | 1 |  | The only time the output is positive is when the inputs are not the same. |
| A                 | B                                                                                   | Y                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 0                 | 0                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 0                 | 1                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 1                 | 0                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 1                 | 1                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| <b>NOT</b>        |  | $\bar{A} = Y$               | <table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>                                                                                                                        | A                  | Y | 0 |   | 1 |  | The output is the opposite of the input. |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| A                 | Y                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 0                 |                                                                                     |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 1                 |                                                                                     |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| <b>NAND</b>       |  | $\overline{A \cdot B} = Y$  | <table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> | A                  | B | Y | 0 | 0 |  | 0                                        | 1 |  | 1 | 0 |  | 1 | 1 |  | The output is positive provided all the inputs are not positive.          |
| A                 | B                                                                                   | Y                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 0                 | 0                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 0                 | 1                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 1                 | 0                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 1                 | 1                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| <b>NOR</b>        |  | $\overline{A + B} = Y$      | <table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> | A                  | B | Y | 0 | 0 |  | 0                                        | 1 |  | 1 | 0 |  | 1 | 1 |  | The only time the output is positive is when all the inputs are negative. |
| A                 | B                                                                                   | Y                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 0                 | 0                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 0                 | 1                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 1                 | 0                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 1                 | 1                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| <b>XNOR</b>       |  | $\overline{A \oplus B} = Y$ | <table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> | A                  | B | Y | 0 | 0 |  | 0                                        | 1 |  | 1 | 0 |  | 1 | 1 |  | The only time the output is positive is when all the inputs are the same. |
| A                 | B                                                                                   | Y                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 0                 | 0                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 0                 | 1                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 1                 | 0                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |
| 1                 | 1                                                                                   |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                    |   |   |   |   |  |                                          |   |  |   |   |  |   |   |  |                                                                           |